ОДИН ИЗ НЕСТАНДАРТНЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Шумай Т.А.[1], Васильева С.Е.[2]

[1]Шумай Татьяна Анатольевна – доцент;
[2]Васильева Светлана Егоровна – старший преподаватель,
кафедра математики, инженерный факультет,
Иркутский государственный аграрный университет,
г. Иркутск

Аннотация: *для получения высокого балла при сдаче Единого государственного экзамена необходимо решить задачи повышенной сложности, к которым относится задание под номером 15, включающее показательное или логарифмическое неравенство. В статье рассматривается один из методов решения - метод рационализации.*
Ключевые слова: *неравенства, традиционный метод решения, нестандартный метод решения, метод рационализации, трансцендентные неравенства.*

УДК 512

В элементарной математике выделяют два вида неравенств: алгебраические и трансцендентные (показательные, логарифмические, тригонометрические).

Разработчиками КИМов последних трех лет были предложены задания 15, в которых необходимо было решить сложные неравенства, содержащие показательную или логарифмическую функцию.

В отчете ФИПИ за 2017 год отмечается, что в КИМ ЕГЭ по математике профильного уровня были изменены подходы к разработке заданий 15 (неравенство) с целью исключения искусственных выражений с логарифмами по переменному основанию. Задание 15 относится к алгебраическим заданиям повышенного уровня с развернутым ответом и проверяет умение решать неравенства. Ненулевые баллы за выполнение этого задания получило около 15% участников экзамена, максимальный балл – 11%.

Указаны типичные ошибки:

- невнимательное чтение математической записи неравенства;
- непонимание алгоритма решения логарифмических неравенств;
- небрежность при изображении множеств на координатной прямой.

Очень много ошибок допущено при решении дробно-рационального неравенства (забыт знаменатель).

В школьной практике сложные неравенства из банка ЕГЭ решаются классическими алгебраическими методами, что вызывает у учащихся ряд трудностей. Не всякое неравенство в результате преобразований или с помощью «удачной» замены переменной может быть сведено к неравенству стандартного вида, для которого существует определенная схема решения. В таких случаях иногда оказывается полезным использовать другие (нестандартные) методы решения. Условно, нестандартные методы – это методы, которые не нашли отражения в школьных учебниках и школьной практике, однако во многих случаях являются эффективными и существенно упрощают решение задачи [1].

Одним из самых доступных «нестандартных» методов решения неравенств повышенной сложности, содержащих логарифмическую, показательную функции или их комбинации, является метод рационализации.

Термин «рационализация» произошел от латинского слова ratio – разум. Следовательно, под рационализацией следует понимать усовершенствование деятельности для улучшения механизмов и способов ее выполнения.

Рационализация сложных неравенств заключается во введении более целесообразных действий для упрощения алгоритма решения.

Цель настоящей работы – применение метода рационализации для решения трансцендентных неравенств и изложение основных методических рекомендаций в овладении этим методом. Этому методу около 50 лет. Впервые термин «рационализация неравенств» появился в 1969 году в журнале «Математика» № 3 в статье Дорофеева Г.В. «Обобщенный метод интервалов». В книге Моденова В.П. «Пособие по математике» за 1972 год будет назван методом декомпозиции.

Терминология «метод замены множителей» относится к 90-м годам, который опубликовали Голубев В.И. и Тарасов В.А. в работе «Эффективные пути решения неравенств» (Львов. Квантор, 1992).

В последнее время метод рационализации становится все более популярным, т.к. позволяет упростить и сократить время решения сложных показательных и логарифмических неравенств.

Метод рационализации базируется на концепции равносильности математических высказываний и реализуется в виде алгоритмов рационализации, т.е. осуществляется с помощью равносильных преобразований по знаку в области определения сложного выражения $F(x)$ на более простое выражение

$G(x)$ (в конечном счете, рациональное), при котором неравенство $G(x) > 0$ ($G(x) < 0$) равносильно неравенству $F(x) > 0$ ($F(x) < 0$). В этом случае говорят, что выражение $G(x)$ является рационализацией для выражения $F(x)$ [1, 3]. Метод рационализации используют при решении неравенств вида $F(x) \vee 0$ (символ $\vee$ означает один из знаков неравенств $\leq, \geq, >, <$), в которых выражение $F(x)$ удается рационализировать.

Теоретической основой этого метода являются понятие равносильности неравенств и свойства монотонной функции. Если неравенства А и В равносильны, то это обозначают $A \Leftrightarrow B$. Равносильные преобразования используют для того, чтобы в неравенстве освободиться от степеней и знаков логарифма, и привести данное неравенство к более простому рациональному неравенству (которое решается методом интервалов).

Отметим, что функции $f(x) = \log_a x$ и $g(x) = a^x$ являются монотонными во всей своей области определения, причем при $a > 1$ они являются возрастающими, а при $0 < a < 1$ - убывающими.

Приведем некоторые методические рекомендации по алгоритму решения показательных и логарифмических неравенств методом рационализации.

1. Если правая часть исходного неравенства не является нулем, то приводим заданное неравенство к виду $F(x) \vee 0$.

2. Привести неравенство $F(x) \vee 0$ к каноническому виду

$$\frac{f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x)}{g_1(x) \cdot g_2(x) \cdot \ldots \cdot g_k(x)} \vee 0, \qquad (1)$$

где множители $f_i(x)$ и $g_j(x)$ ($i = \overline{1,n}$; $j = \overline{1,k}$) представляют собой рациональные, показательные и логарифмические функции. Каждый из множителей $f_i(x)$ и $g_j(x)$ должен быть линейным.

3. Если любой из множителей можно рационализировать, то следует заменить его на совпадающий с ним по знаку по соответствующим формулам.

Представим некоторые выражения, для которых можно использовать метод рационализации, в виде таблицы. Во втором столбце – функция $F(x)$, которую рационализируют. В третьем столбце – функция $G(x)$ - знакосовпадающая с функцией $F(x)$ на области её (допустимых значений) определения. В четвертом столбце указывается область определения функций.

Таблица 1. Равносильные преобразования

№	Выражение F	Выражение G	ОДЗ
1	$\log_{h(x)} f(x) - \log_{h(x)} g(x)$	$(h(x)-1)(f(x)-g(x))$	$f(x) > 0$, $g(x) > 0$, $h(x) > 0$, $h(x) \neq 1$
2	$\log_{h(x)} f(x) - 1$	$(h(x)-1)(f(x)-h(x))$	$f(x) > 0$, $h(x) > 0$, $h(x) \neq 1$
3	$\log_{h(x)} f(x)$	$(h(x)-1)(f(x)-1)$	$f(x) > 0$, $h(x) > 0$, $h(x) \neq 1$
4	$\log_{f(x)} h(x) - \log_{g(x)} h(x)$	$(f(x)-1)(g(x)-1)(h(x)-1)(g(x)-f(x))$	$f(x) > 0$, $h(x) > 0$, $f(x) \neq 1$,

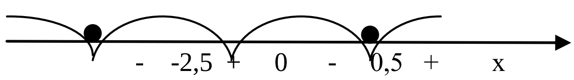
			$g(x)>0$, $g(x)\neq 1$
5	$h(x)^{f(x)}-h(x)^{g(x)}$	$\big(h(x)-1\big)\big(f(x)-g(x)\big)$	$h(x)>0$
6	$h(x)^{f(x)}-1$	$\big(h(x)-1\big)f(x)$	$h(x)>0$
7	$f(x)^{h(x)}-g(x)^{h(x)}$	$\big(f(x)-g(x)\big)h(x)$	$f(x)>0$, $g(x)>0$

$h(x)>0$ - функция или число.

4. Исходное неравенство преобразуется в систему: рационализированное неравенство и ОДЗ исходного неравенства. При решении системы неравенств с одной переменной обычно решают каждое неравенство, затем находят пересечение полученных множеств решений.

Рассмотрим примеры решения неравенств традиционным методом и сравним его с методом рационализации.

1. Решить неравенство $\dfrac{2^{2x^2+6x-4}-(0,5)^{2x^2+2x-1}}{5^x-1}\leq 0$.

Традиционный метод	**Метод рационализации**
Так как левая часть неравенства является дробью, то решение исходного неравенства сводится к решению двух систем 1. $\begin{cases}2^{2x^2+6x-4}-2^{-2x^2-2x+1}\geq 0\\5^x-1<0\end{cases}\Leftrightarrow$ $\begin{cases}2x^2+6x-4\geq -2x^2-2x+1\\x<0\end{cases}\Leftrightarrow$ $\begin{cases}4x^2+8x-5\geq 0\\x<0\end{cases}\Leftrightarrow$ $\begin{cases}4\left(x-\dfrac{1}{2}\right)(x+2,5)\geq 0\\x<0\end{cases}\Leftrightarrow$ $x\in(-\infty,-2,5]$ 2. $\begin{cases}2^{2x^2+6x-4}-2^{-2x^2-2x+1}\leq 0\\5^x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow$ $\begin{cases}4x^2+8x-5\leq 0\\x>0\end{cases}\Leftrightarrow$ $\begin{cases}4\left(x-\dfrac{1}{2}\right)(x+2,5)\leq 0\\x>0\end{cases}$ $x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$ Ответ: $x\in(-\infty,-2,5]\cup\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$.	Запишем неравенство в виде $\dfrac{2^{2x^2+6x-4}-2^{-2x^2-2x+1}}{5^x-1}\leq 0$ и рационализируем его по формулам $h(x)^{f(x)}-h(x)^{g(x)}=\big(h(x)-1\big)\big(f(x)-g(x)\big)$ $h(x)^{f(x)}-1=\big(h(x)-1\big)f(x)$ $\dfrac{(2-1)\left(2x^2+6x-4+2x^2+2x-1\right)}{(5-1)x}\leq 0$, $\Leftrightarrow\dfrac{\left(4x^2+8x-5\right)}{4x}\leq 0\Leftrightarrow$ $\dfrac{4(x-0,5)(x+2,5)}{4x}\leq 0$ Решаем методом интервалов  Ответ: $x\in(-\infty,-2,5]\cup\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$. В рассмотренном примере метод рационализации является более эффективным.

2. Решить неравенство $\log_{2x}\left(2x^2-4x+6\right)\leq\log_{2x}\left(x^2+x\right)$.

Традиционный метод	**Метод рационализации**

<table>
<tr>
<td>

ОДЗ:

$$\begin{cases} 2x^2-4x+6>0 \\ x^2+x>0 \\ x>0 \\ x\neq\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+3>0 \\ x(x+1)>0 \\ x>0 \\ x\neq 0{,}5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x<-1 \\ x\neq\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$$

Рассмотрим на ОДЗ два случая:

а) основание логарифма $2x>1$

$$\begin{cases} 2x^2-4x+6\le x^2+x \\ x>\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2-5x+6\le 0 \\ x>0{,}5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-3)\le 0 \\ x>\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x\in[2,3]$$

б) основание логарифма $2x<1$

$$\begin{cases} 2x^2-4x+6\ge x^2+x \\ x<0{,}5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-5x+6\ge 0 \\ x<0{,}5 \end{cases} \Rightarrow x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$$

Ответ: $x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)\cup[2,3]$.

</td>
<td>

Чтобы применить метод рационализации, в правой части необходим нуль. Переносим $\log_{2x}\left(x^2+x\right)$ влево:

$$\log_{2x}\left(2x^2-4x+6\right)-\log_{2x}\left(x^2+x\right)\le 0.$$

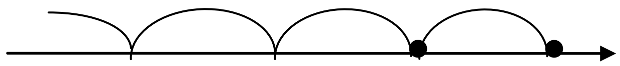
Это неравенство преобразуется в систему: (см. таблицу формула 1)

$$\begin{cases} (2x-1)\left(2x^2-4x+6-x^2-x\right)\le 0 \\ 2x^2-4x+6>0 \\ x^2+x>0 \\ x>0 \\ x\neq\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (2x-1)\left(x^2-5x+6\right)\le 0 \\ x^2-2x+3>0 \\ x(x+1)>0 \\ x>0 \\ x\neq\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left(x-\dfrac{1}{2}\right)(x-2)(x-3)\le 0 \\ x^2-2x+3>0 \\ x>0 \\ x\neq\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

для любых x решаем эту систему методом интервалов



Ответ: $x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)\cup[2,3]$.

В данном случае метод рационализации избавляет от необходимости рассматривать два случая (основание логарифма больше/меньше 1).

</td>
</tr>
</table>

Чем сложнее неравенство, тем более ощутимыми становятся преимущества метода рационализации.

3. Решить неравенство: $9\log_7\left(x^2+x-2\right)\le 10+\log_7\dfrac{(x-1)^9}{x+2}$.

Традиционный метод	**Метод рационализации**

<table>
<tr>
<td>
Значения x, при которых определены обе части неравенства задаются условиями:

$$\begin{cases} x^2+x-2>0 \\ \frac{(x-1)^9}{x+2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x-1)>0 \\ \frac{(x-1)^9}{x+2}>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x<-2 \\ x>1 \end{cases}$$

ОДЗ данного неравенства – есть множество $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$. Для таких значений x исходное неравенство приводится к виду:

$$9\log_7(x+2)(x-1)\le 10+\log_7\frac{(x}{x}$$

$$\log_7|x+2|^9+\log_7|x-1|^9\le$$

$$10+\log_7|x-1|^9-\log_7|x+2|$$

$$\Leftrightarrow \log_7|x+2|^9+\log_7|x+2|\le 10$$

$$\Leftrightarrow$$

$$10\log_7|x+2|\le 10 \Leftrightarrow$$

$$\log_7|x+2|\le 1$$

$$\Leftrightarrow |x+2|\le 7 \Leftrightarrow -9\le x\le 5.$$

С учетом ОДЗ, множеством решений неравенства является объединение интервалов $[-9,2)$ и $(1,5]$.

Ответ: $x\in[-9,2)\cup(1,5]$.
</td>
<td>
Перепишем исходное неравенство в виде

$$9\log_7\left(x^2+x-2\right)-\log_7 7^{10}-\log_7\frac{(x-1)^9}{x+2}\le 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\log_7(x+2)^9(x-1)^9-\log_7 7^{10}-\log_7\frac{(x-1)^9}{x+2}\le 0$$

,

$$\log_7\frac{(x+2)^9(x-1)^9(x+2)}{(x-1)^9}-\log_7 7^{10}\le 0$$

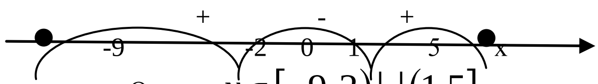
$$\Leftrightarrow \log_7(x+2)^{10}-\log_7 7^{10}\le 0.$$

Используем метод рационализации (см. таблицу формула 1)

$$\begin{cases} 6\left((x+2)^{10}-7^{10}\right)\le 0 \\ x^2+x-2>0 \\ \frac{(x-1)^9}{x+2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} |x+2|\le 7 \\ (x+2)(x-1)>0 \\ \frac{(x-1)^9}{x+2}>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -9\le x\le 5 \\ (x+2)(x-1)>0 \\ \frac{(x-1)^9}{x+2}>0 \end{cases}$$



Ответ: $x\in[-9,2)\cup(1,5]$
</td>
</tr>
</table>

При решении логарифмических неравенств, содержащих выражения $\log_a\left(f(x)g(x)\right)$ и $\log_a\frac{f(x)}{g(x)}$ традиционным методом, необходимо знать, что равносильный переход от одного выражения к другому выглядит так

$$\log_a\left(f(x)g(x)\right)=\log_a|f(x)|+\log_a|g(x)| \qquad (2)$$

$$\text{и } \log_a \frac{f(x)}{g(x)} = \log_a \left| f(x) \right| - \log_a \left| g(x) \right|. \qquad (3)$$

Большинство учащихся об этом забывают, что приводит к потере решений неравенства. В этом случае метод рационализации облегчает решение неравенства.

Вывод. Использование метода рационализации расширяет аппарат для решения трансцендентных неравенств. В этом заключается его практическая значимость. Метод рационализации позволяет не только упростить и сократить время решения сложных неравенств, но и уменьшить количество ошибок и увеличить число учащихся, приступающих и решивших задание № 15 ЕГЭ профильного уровня.

Список литературы

1. *Коропец З.Л.* Математика. Нестандартные методы решения неравенств и их систем. Учебное пособие. / З.Л. Коропец, А.А. Коропец, Т.А. Алексеева. Орел: ОрелГТУ, 2012. 124 с.
2. *Корянов А.Г.. Прокопьев А.А.* Методы решения логарифмических неравенств. // «Математика для школьников». М.: «Школьная пресса», 2012. № 6. С. 3-11. № 7. С. 3-11.
3. Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения. 10-11 классы. Учебно-методическое пособие / С.Н. Олехник, М.К. Потапов, П.И. Пасиченко. М.: Дрофа, 2001.
4. [Электронный ресурс]. Режим доступа: www.alexlarin.narod.ru – сайт по оказанию информационной поддержки студентам при изучении различных разделов высшей математики и абитуриентам при подготовке к ЕГЭ/ (дата обращения: 10.10.2017).
5. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http:///eek.diary.ru/ - сайт по оказанию помощи абитуриентам, студентам, учителям по математике/ (дата обращения: 10.10.2017).