ВЕРОЯТНОСТНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ДРОБНЫХ ИНТЕГРАЛОВ КОБЕРА И ЭРДЕЛЙИ-КОБЕРА

Тарасова С.С.[1], Тарасов В.Е.[2]

[1]Тарасова Светлана Семеновна – кандидат технических наук, доцент,
кафедра теории вероятностей и компьютерного моделирования,
факультет информационных технологий и прикладной математики,
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет);
[2]Тарасов Василий Евгеньевич – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник,
Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д.В. Скобельцына
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
г. Москва

Аннотация: *в статье предлагается вероятностная интерпретация дробного интегрирования Кобера нецелого порядка. Доказывается, что дробный интеграл Кобера является оператором дилатации (растяжения) с бета-распределенным масштабированием с точностью до постоянного множителя. Дробные производные Кобера имеют аналогичную вероятностную интерпретацию. Дробный интеграл и производные Эрделйи-Кобера имеют вероятностную интерпретацию, согласно которой они являются операторами дилатации с непрерывно распределенным масштабированием.*

Ключевые слова: *теория вероятностей, бета распределение, дробное исчисление, интеграл Кобера, дилатация, масштабирование.*

Дробными интегралами и производными называются операторы, являющиеся обобщениями стандартных интегралом и производных целого порядка на случай, когда порядок является произвольным числом [1, 2, 3, 4]. В современной математике известны разные типы дробных интегралов и производные нецелых порядков [1, 2, 3, 4]. Наиболее известными являются операторы, предложенные Лиувиллем, Риманом, Летниковым, Сониным, Вейлем, Риссом, Кобером, Эрделйи, Адамаром, Капуто [1, 2, 3, 4]. История теории дробных интегралов и производных включает более трехсот лет развития [5, 6, 7, 8]. Операторы нецелого порядка имеют широкое применение в разных науках (например, смотрите справочник дробному исчислению и его приложениям, которая будет опубликована в 2019 году в восьми томах [9]). Эти применения включают в себя явления релаксации и диффузии, пространственную нелокальность и затухающую память степенного типа, открытость систем и диссипацию, пространственную и частотную дисперсию степенного типа и многие другие.

Существуют различные интерпретации дробных производных и интегралов, такие как физическая интерпретация [10, 11, 12, 13, 14], геометрические интерпретации [13, 14, 15, 16, 17], экономическая интерпретация [18, 19, 20] и «информационная» интерпретация [21]. Важнейшее значение имеет вероятностная интерпретация дробных производных [22, 23] и дробных интегралов [24, 25].

В этой статье мы предлагаем вероятностную интерпретацию дробного интегрирования Кобера, предложенного Кобером [26] в 1940 году, как обобщение одного из самых известных дробных интегрирований Римана-Лиувилля.

Дробное интегрирование Римана-Лиувилля (RL) порядка $\alpha > 0$ (см. уравнение 2.17 в [1, с. 42] и уравнение 2.1.1 в [4, с. 69]) определяется выражением

$$\left(I^{\alpha}_{RL;0+}\varphi\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\varphi(\tau)d\tau\,, \tag{1}$$

где $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция, а функция $\varphi(t)$ считается измеримой на отрезке $(0,t)$ и удовлетворяющей условию $\int_0^t |\varphi(\tau)|d\tau < \infty$. Для положительного целого $\alpha = n \in \mathbb{N}$ дробный интеграл Римана-Лиувилля (1) совпадает (например, смотрите уравнение 2.6 в [1, с. 41] и уравнение 2.1.3 в [4, с. 70]) с n-кратным интегралом вида

$$\left(I^{n}_{RL;0+}\varphi\right)(t) = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n\, \varphi(t_n) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-\tau)^{n-1}\,\varphi(\tau)d\tau. \tag{2}$$

В качестве обобщения дробного интеграла Римана-Лиувилля (1) в 1940 году Кобером было предложено новое дробное интегрирование нецелого порядка [26]. Дробный интеграл Кобера (K) порядка $\alpha > 0$ ([1, с. 246] и [4, с. 106]) определяется уравнением

$$\left(I^{\alpha}_{K;0+;\eta}\varphi\right)(t) = \frac{t^{-\alpha-\eta}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \tau^{\eta}\,(t-\tau)^{\alpha-1}\varphi(\tau)\,d\tau, \tag{3}$$

где η – вещественное число и $\alpha > 0$. Интегральный оператор (3) является ограниченным, если $\varphi(\tau) \in L_p(0,\infty)$ при $1 \le p < \infty$, и $\eta > -1 + 1/p$, [1,с. 323]. Для $\eta = 0$, оператор (3) выражается через дробный интеграл Римана-Лиувилля (1) следующей формулой

$$\left(I^{\alpha}_{K;0+;1}\varphi\right)(t) = t^{-\alpha}\,\left(I^{\alpha}_{RL;0+}\varphi\right)(t). \tag{4}$$

Используя выражение 2.2.4.8 из [27, с. 296] в виде

$$\int_0^t \tau^{\eta}(t-\tau)^{\alpha-1} d\tau = t^{\alpha+\eta}\, B(\eta+1,\alpha), \qquad (5)$$

где $B(\alpha,\beta) = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha+\beta)$ – бета функция, получаем

$$\left(I^{\alpha}_{K;0+;\eta} 1\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} B(\eta+1,\alpha) = \frac{\Gamma(\eta+1)}{\Gamma(\eta+\alpha+1)}. \qquad (6)$$

Равенство (6) означает, что ядро интегрального оператора Кобера (3) можно интерпретировать как функцию плотности распределения вероятности с точностью до постоянного множителя (6). В вероятностной интерпретации дробного интеграла Кобера переменную τ следует рассматривать как случайную величину.

Для того, чтобы дать вероятностную интерпретацию дробного интеграла Кобера, мы сделаем замену переменной. Определив новую переменную $x = \tau/t$ вместо переменной τ, мы можем представить дробный интеграл Кобера (3) в виде

$$\left(I^{\alpha}_{K;0+;\eta} \varphi\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 x^{\eta}(1-x)^{\alpha-1}\, \varphi(x\, t)\, dx. \qquad (7)$$

Из уравнения (7) видно, что ядро интегрального оператора (7) может интерпретироваться как функцию плотности распределения вероятности для бета- распределения [28,29,30,31] с точностью до множителя (6). Функция плотности этого распределения определяется выражением

$$f_{\alpha;\beta}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \qquad (8)$$

для $x \in [0,1]$ и $f_{\alpha;\beta}(x) = 0$ для $x \notin [0,1]$, а $B(\alpha,\beta)$ – бета-функция. Отметим, что бета-распределение описывает долю суммы двух слагаемых, приходящуюся на каждое из них, если слагаемые являются случайными величинами, распределение которых описывается гамма-распределением. В результате дробный интеграл Кобера может быть представлен в виде

$$\left(I^{\alpha}_{K;0+;\eta} \varphi\right)(t) = \frac{\Gamma(\eta+\alpha+1)}{\Gamma(\eta+1)} \int_0^1 f_{\eta+1;\alpha}(x)\, \varphi(x\, t)\, dx. \qquad (9)$$

Заметим, что интеграл (9) содержит $\varphi(x\, t)$ вместо $\varphi(x)$. Это позволяет нам предложить интерпретацию, используя масштабирование (растяжение). Рассмотрим оператор S_x растяжения (масштабирования, дилатации) [1, с. 86], [4, с. 11], который определяется уравнением

$$(S_x \varphi)(t) = \varphi(x\, t\,), \qquad (10)$$

где $x > 0$. Оператор расширения (масштабирования) (10) описывает изменение масштаба. Известно, что растяжение евклидовых геометрических фигур меняет размер, но не форму этого рисунка. В физике и экономике дилатация является феноменом изменения масштаба процессов и объектов. Используя масштабный оператор (10), мы можем представить дробный интеграл Кобера в виде

$$\left(I^{\alpha}_{K;0+;\eta} \varphi\right)(t) = \frac{\Gamma(\eta+\alpha+1)}{\Gamma(\eta+1)} \int_0^1 f_{\eta+1;\alpha}(x) (S_x \varphi)(t)\, dx. \qquad (11)$$

Из уравнения (11) видно, что дробный интеграл Кобера (3) можно интерпретировать как усреднение дилатации по бета-распределению с точностью до числового множителя (6). В результате интерпретация дробных интегралов Кобера напрямую связана с теорией вероятностей.

Поскольку дробный интеграл Римана-Лиувилля (1) можно выразить через дробный интеграл Кобера с $\eta = 0$, который умножается на степенную функцию t^{α}, то мы можем использовать вероятностную интерпретацию и для дробного интегрирования Римана-Лиувилля.

В результате представление (11) позволяет утверждать, что дробный интеграл Кобера (3) является оператором дилатации с бета-распределенным масштабированием (растяжением) с точностью до постоянного множителя (6). Аналогично, можно дать вероятностную интерпретацию и дробной производной Кобера [4, с. 108].

Отметим, что в общем случае можно определять более общие виды операторов с непрерывно распределенным масштабированием (растяжением, дилатацией). Оператор расширения (масштабирования) с непрерывно распределенным масштабированием можно рассматривать как обобщение дробного интеграла Кобера. Обобщенный оператор дилатации с непрерывно распределенным масштабированием может быть определен уравнением

$$(I_S \varphi)(t) = \int_0^{\infty} f_S(x) (S_x \varphi)(t) dx = \int_0^{\infty} f_S(x)\, \varphi(x\, t) dx\,, \qquad (12)$$

где $f_S(x) \geq 0$ является функций плотности распределения вероятности, которая удовлетворяет условию нормировки

$$\int_0^{\infty} f_S(x) dx = 1\,. \qquad (13)$$

В уравнении (12) предполагается, что функции $\varphi(x)$ и $f_S(x)$ являются кусочно-непрерывными функциями, определенными на вещественной оси $\mathbb{R}$, для которых интеграл $\int_0^{\infty} f_S(x)\,|\varphi(x)|\,dx$ сходится.

Если функция плотности $f_S(x)$ описывает бета-распределение, то оператор (12) является дробным интегралом Кобера с точностью до численного множителя. В общем случае мы можем использовать другие виды распределений (например, см. [28,29,30,31]). Например, мы можем использовать распределение Вейбулла (W), которое определяется функцией плотности

$$f_W(x) = \begin{cases} a\,\lambda x^{a-1}\,exp(-\lambda\,x^a) & x > 0, \\ 0 & x \le 0, \end{cases} \qquad (14)$$

где коэффициент $a > 0$ определяет форму распределения, коэффициент $\theta = \lambda^{-1/a}$ $(\lambda > 0)$ определяет масштаб. Заметим, что это распределение впервые применено Розином и Раммлером для описания распределения частиц по размерам [32]. Мы можем использовать гамма-распределение, для которого функция плотности вероятности

$$f_G(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^a\,x^{a-1}}{\Gamma(a)}\,exp\,(-\lambda\,x) & x > 0, \\ 0 & x \le 0, \end{cases} \qquad (15)$$

где коэффициент $a > 0$ определяет форму распределения, и коэффициент $\theta = 1/\lambda$ определяет масштаб.

Отметим, что одним из примеров оператора (12), который обобщает интеграл Кобера (3), является дробный интеграл Эрделйи_-Кобера порядка $\alpha > 0$ [4, с. 105], определяемый формулой

$$\left(I^{\alpha}_{EK;0+;\sigma,\eta}\varphi\right)(t) = \frac{\sigma\,t^{-\sigma(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \tau^{\sigma(\eta+1)-1}\,(t^{\sigma} - \tau^{\sigma})^{\alpha-1}\varphi(\tau)\,d\tau. \qquad (16)$$

Оператор (16) ограничен для функций $\varphi(\tau) \in L_p(0,\infty)$ при $1 \le p < \infty$, если $\eta > -1 + 1/(p\sigma)$, [1, с. 246]. Для $\sigma = 1$, оператор (16) принимает вид дробного интеграла Кобера (3). Оператор (16) может быть представлен уравнением (12) с точностью до числового множителя в виде

$$\left(I^{\alpha}_{EK;0+;\sigma,\eta}\varphi\right)(t) = \frac{\Gamma(\eta+\alpha+1)}{\Gamma(\eta+1)} \int_0^1 f_{EK}(x)(S_x\varphi)(t)\,dx, \qquad (17)$$

где функция плотности распределения вероятности определяется выражением

$$f_{EK}(x) = \frac{\sigma}{B(\eta+1,\alpha)}\,x^{\sigma(\eta+1)-1}(1 - x^{\sigma})^{\alpha-1}. \qquad (18)$$

При $\sigma = 1$ функция плотности (18) описывает бета-распределение (8).

Из уравнений (17), (18) видно, что дробный интеграл Эрделйи-Кобера (16) можно интерпретировать как усреднение дилатации по распределению, плотность которого задается выражением (18), с точностью до числового множителя.

В результате дробные интегралы Кобера и Эрделйи-Кобера интерпретируются как операторами дилатации с непрерывно распределенным масштабированием.

Используя оператор дилатации (12), мы можем определить дробные интегралы и производные целых и нецелых порядков с непрерывно распределенной дилатацией (масштабированием). Например, производные целого порядка $n \in \mathbb{N}$ с непрерывно распределенной дилатацией могут быть определены как

$$(D^n_S\varphi)(t) = \left(I_S\varphi^{(n)}\right)(t) = \int_0^{\infty} f_S(x)\varphi^{(n)}(x\,t)dx\,. \qquad (19)$$

где $f_S(x) \ge 0$ – плотность распределения вероятности и $\varphi^{(n)}(x) = d^n\varphi(x)/dx^n$.

Дробные производные и интегралы с непрерывно распределенной дилатацией (масштабированием) можно определить аналогично [33]. Например, в таких операторах дробная производная Капуто $\left(\mathrm{D}^{\alpha}_{C,0+}\varphi\right)(t)$ функции $\varphi(\tau)$ (или другой тип дробных производных) может быть использована в уравнении (17) вместо производной $\varphi^{(n)}(x\,t)$. Подробности смотрите в разделе 9 работы [33].

Мы полагаем, что предложенные дифференциальные и интегральные операторы, включая дробные интегралы и производные Кобера, могут быть использованы для описания эффектов масштаба в экономике, физике и других науках. Такие применения дробных интегралов и производных и их обобщений, которые включают в себя непрерывно распределенное масштабирование (растяжение, дилатацию), могут дать новые интересные результаты и привести к развитию дробного исчисления.

Список литературы

1. *Самко С.Г., Килбас А.А., Марычев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые приложения. Минск: Наука и Техника, 1987. 688 с.
2. *Kiryakova V.* Generalized Fractional Calculus and Applications. New York: Longman and J. Wiley, 1994. 360 p. ISBN: 9780582219779
3. *Podlubny I.* Fractional Differential Equations. San Diego: Academic Press, 1998. 340 p.

4. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 540 p. ISBN: 978-0-444-51832-3
5. *Летников А.В.* Об историческом развитии теории дифференцирования с произвольным указателем // Математический Сборник. 1868. Том .3. № 2. С.85-112. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://mi.mathnet.ru/msb8048/ (дата обращения: 2019.01.14).
6. *Ross B.* The development of fractional calculus 1695-1900 // Historia Mathematica. 1977. Vol. 4. No. 1. P. 75–89. DOI: 10.1016/0315-0860(77)90039-8.
7. *Tenreiro Machado J., Kiryakova V., Mainardi F.* Recent history of fractional calculus // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2011. Vol. 16. № 3. P. 1140–1153. DOI: 10.1016/j.cnsns.2010.05.027.
8. *Tenreiro Machado J.A., Kiryakova V.* The chronicles of fractional calculus // Fractional Calculus and Applied Analysis, 2017. Vol. 20. № 2. P. 307–336. DOI: 10.1515/fca-2017-0017.
9. Handbook of Fractional Calculus with Applications. Edited by J.A. Tenreiro Machado. Volumes 1-8. Berlin: De Gruyter, 2019.
10. *Нигматуллин Р.Р.* Дробный интеграл и его физическая интерпретация // Теоретическая и математическая физика, 1992. Том 90. № 3. С. 242-251.
11. *Рутман Р.С.* О физических интерпретациях фрактального интегрирования и дифференцирования // Теоретическая и математическая физика. 1995. Том 105. № 3. С. 393-404.
12. *Heymans N., Podlubny I.* Physical interpretation of initial conditions for fractional differential equations with Riemann-Liouville fractional derivatives // Rheologica Acta, 2006. Vol. 45. № 5. P. 765-772.
13. *Podlubny I.* Geometrical and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation // Fractional Calculus and Applied Analysis, 2002. Vol. 5. № 4. P. 367-386. (arXiv:math/0110241).
14. *Moshrefi-Torbati M., Hammond J.K.* Physical and geometrical interpretation of fractional operators // Journal of the Franklin Institute, 1998. Vol. 335. № 6. P. 1077-1086. DOI: 10.1016/S0016-0032(97)00048-3.
15. *Ben Adda F.* Geometric interpretation of the differentiability and gradient of real order // Comptes Rendus de l'Academie des Sciences - Series I - Mathematics. 1997. Vol.326. No.8. P.931-934.
16. *Podlubny I., Despotovic V., Skovranek T., McNaughton B.H.* Shadows on the walls: Geometric interpretation of fractional integration // The Journal of Online Mathematics and Its Applications, 2007. Vol. 7. Article ID 1664.
17. *Tarasov V.E.* Geometric interpretation of fractional-order derivative // Fractional Calculus and Applied Analysis, 2016. Vol. 19. № 5. P. 1200-1221. DOI: 10.1515/fca-2016-0062.
18. *Tarasova V.V., Tarasov V.E.* Economic interpretation of fractional derivatives // Progress in Fractional Differentiation and Applications, 2017. Vol.3. No.1. P.1-7. DOI: 10.18576/pfda/030101 (arXiv:1712.09575)
19. *Rehman H.U., Darus M., Salah J.* A note on Caputo’s derivative operator interpretation in economy // Journal of Applied Mathematics, 2018. Vol. 2018, Article ID 1260240, 7 pages DOI: 10.1155/2018/1260240
20. *Тарасова В.В., Тарасов В.Е.* Микроэкономический смысл производных нецелого порядка // Наука и образование сегодня, 2017. № 8 (19). С. 32-39. [Электронный ресурс]. Режим доступа:: http://publikacija.ru/images/PDF/2017/19/Science-and-education-today-8-19.pdf / (дата обращения: 2019.01.14).
21. *Tarasov V.E.* Interpretation of fractional derivatives as reconstruction from sequence of integer derivatives // Fundamenta Informaticae, 2017. Vol. 151. № 1-4. P. 431-442. DOI: 10.3233/FI-2017-1502.
22. *Tenreiro Machado J.A.* A probabilistic interpretation of the fractional-order differentiation // Fractional Calculus and Applied Analysis, 2009. Vol. 6. № 1. P. 73-80.
23. *Tenreiro Machado J.A.* Fractional derivatives: Probability interpretation and frequency response of rational approximations // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2009. Vol. 14. № 9-10. P. 3492-3497. DOI: 10.1016/j.cnsns.2009.02.004.
24. *Станиславский А.А.* Вероятностная интерпретация интеграла дробного порядка // Теоретическая и математическая физика, 2004. Том 138. № 3. С. 491-507. DOI: 10.4213/tmf34.
25. *Тарасова С.С., Тарасов В.Е.* Теория вероятностей и интегралы распределенного порядка // Наука, техника и образование, 2018. № 2 (43). С. 5-8. (ISSN 2312-8267) DOI: 10.20861/2312-8267-2018-43-002.
26. *Kober H.* On fractional integrals and derivatives // The Quarterly Journal of Mathematics. Oxford Series. 1940. Vol.11. No.1. P.193-211. DOI: 10.1093/qmath/os-11.1.193.
27. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Том 1. Элементарные функции. Москва: Наука, 1981. 800 с.
28. *Forbes C., Evans M., Hastings N., Peacock B.* Statistical Distributions. Fourth Edition. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2011. 212 p. ISBN: 978-0-470-39063-4.
29. *Королюк В.С., Портенко Н.И. Скороход А.В. Турбин А. Ф.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике. 2-ое издание. Москва: Наука, 1985. 640 с.
30. *Кибзун А.И., Горяинова Е.Р., Наумов А.В.* Теория вероятностей и математическая статистика. Москва: Физматлит, 2013. 232 с. ISBN: 978-5-9221-0836-2.

31. *Тарасова С.С.* Теория вероятностей в задачах авиационно-космической техники. Москва: Макс Пресс, 2018. 104 с. ISBN: 978-5-317-05780-0.
32. *Rosin P., Rammler E.* The laws governing the fineness of powdered coal // Journal of the Institute of Fuel, 1933. Vol.7 . P. 29–36.
33. *Tarasov V.E., Tarasova S.S.* Fractional and integer derivatives with continuously distributed lag // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2019. Vol. 70. P. 125-169. DOI: 10.1016/j.cnsns.2018.10.014.
34.